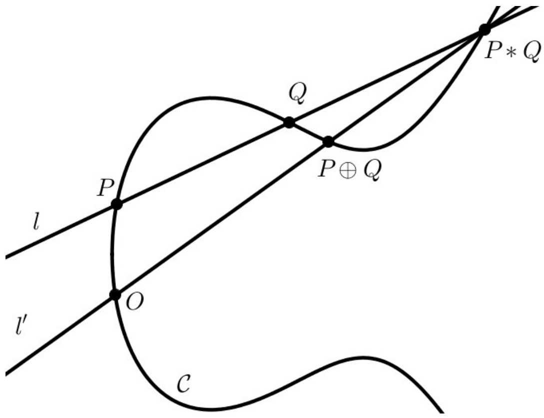
Vorlesung 19, 10.06.2016

Kubik $\mathcal{C}$ mit $O \in \mathcal{C}$.

$$P + Q + P * Q = \mathcal{C} \cdot l,$$
$$O + (P \oplus Q) + P * Q = \mathcal{C} \cdot l'$$



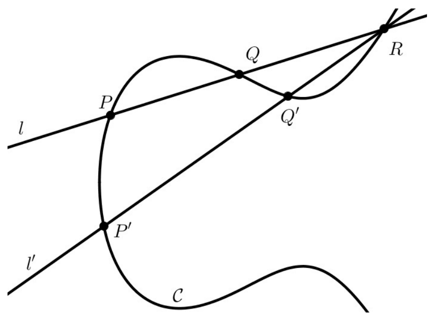
$\mathcal{C}$ allgemein (glatt), $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$ Divisorengruppe.
$D = n_1 P_1 + \ldots n_r P_r \in \mathrm{Div}$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in \mathcal{C}$.
Definiere $\mathrm{Grad}(D) = n_1 + \cdots + n_r$ und
$\mathrm{Div}^k(\mathcal{C}) = \{D \in \mathrm{Div}(\mathcal{C}) \mid \mathrm{Grad}(D) = k\}$.
$\mathrm{Div}^0(\mathcal{C}) \leq \mathrm{Div}(\mathcal{C})$ ist die Untergruppe der Divisoren von Grad 0.

Lineare Äquivalenz von Divisoren

Definition. *D und D' aus $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$ heißen linear äquivalent (schreibe: $D \equiv D'$), wenn $D - D' = \mathcal{C} \cdot \mathcal{D} - \mathcal{C} \cdot \mathcal{D}'$, wobei $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ Kurven gleichen Grades sind und $\mathcal{C}$ nicht als Komponente enthalten.*

Beispiel. $P + Q - (O + (P \oplus Q)) = \mathcal{C} \cdot l - \mathcal{C} \cdot l'$,
d.h. $P + Q \equiv O + (P \oplus Q)$.

$$P + Q + R = \mathcal{C} \cdot l$$
$$P' + Q' + R = \mathcal{C} \cdot l'$$
$$P + Q \equiv P' + Q'$$



Lineare Familie von Divisoren $(\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}_{(\lambda:\mu)})$: Betrachte die Kurven $\mathcal{D} = \mathcal{V}(G)$, $\mathcal{D}' = \mathcal{V}(G')$ mit $G, G' \in \mathbb{C}[x,y,z]_m$. Man erhält eine Familie von Kurven $\mathcal{D}_{(\lambda:\mu)} = \mathcal{V}(\lambda G + \mu G')$; $\lambda G + \mu G' \in \mathbb{C}[x,y,z]_m$, $(\lambda : \mu)$, $(1:0) \leftrightarrow G$, $(0,1) \leftrightarrow G'$.

Definition. *Es sei $\mathcal{C}$ eine glatte projektive Kurve. Die Divisorenklassengruppe $\mathrm{Cl}(\mathcal{C})$ ist definiert durch $\mathrm{Cl}(\mathcal{C}) = \mathrm{Div}^0(\mathcal{C})/\equiv$.*

Kehren wir nun zurück zur Kubik $\mathcal{C}$ mit $O \in \mathcal{C}$.

Satz. Die Abbildung $\phi : (\mathcal{C}, \oplus) \to (\mathrm{Cl}(\mathcal{C}), +)$ mit $P \mapsto P - O$ ist ein Isomorphismus von Gruppen.

Beweis. 1. z.z.: ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus.

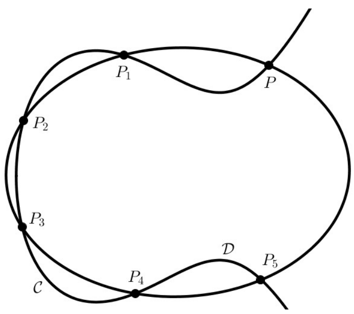
$$P + Q + P * Q = \mathcal{C} \cdot l,\ P \oplus Q + O + P * Q = \mathcal{C} \cdot l' \Rightarrow P + Q \equiv P \oplus Q + O$$
$$\Rightarrow (P - O) + (Q - O) \equiv P \oplus Q - O \Rightarrow \phi(P) + \phi(Q) = \phi(P \oplus Q).$$

2. z.z.: ϕ ist surjektiv. Es sei $D \in \mathrm{Div}^0(\mathcal{C})$ ein beliebiger Divisor. Wir können D schreiben als $D = P_1 + P_2 + \ldots + P_r - Q_1 - Q_2 - \ldots - Q_r$, wobei die Punkte P_i oder Q_i nicht unbedingt paarweise verschieden sein müssen. $\phi(P \ominus Q) = \phi(P) - \phi(Q)$, d.h. $P \ominus Q - O \equiv (P - O) - (Q - O) = P - Q$. Damit gilt

$$D = (P_1 - Q_1) + \ldots + (P_r - Q_r) \equiv (P_1 \ominus Q_1 - O) + \ldots + (P_r \ominus Q_r - O)$$
$$\equiv \phi(P_1 \ominus Q_1) + \ldots + \phi(P_r \ominus Q_r) = \phi\left(\bigoplus_{i=1}^{r}(P_i \ominus Q_i)\right).$$

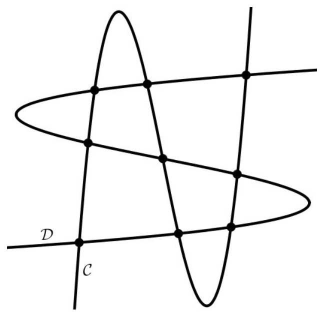
3. z.z.: ϕ ist injektiv. Es seien $P, P' \in \mathcal{C}$ mit $\phi(P) = \phi(P')$, also $P - O \equiv P' - O \Rightarrow P \equiv P' \Rightarrow P - P' = \mathcal{C} \cdot \mathcal{D} - \mathcal{C} \cdot \mathcal{D}'$.

Fall $\mathrm{Grad}(\mathcal{D}) = \mathrm{Grad}(\mathcal{D}') = 1$:
Für $P + R = \mathcal{C} \cdot \mathcal{D}$, $P' + R = \mathcal{C} \cdot \mathcal{D}'$ mit einer Menge von zwei Punkten R gilt $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, da genau eine Gerade durch zwei Punkte existiert $\Rightarrow P = P'$.



Fall $\mathrm{Grad}(\mathcal{D}) = \mathrm{Grad}(\mathcal{D}') = 2$:
Es sei $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$. Der Kegelschnitt $\mathcal{D}$ wird durch fünf Punkte eindeutig festgelegt. $\Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}' \Rightarrow P = P'$.

Fall $\mathrm{Grad}(\mathcal{D}) = \mathrm{Grad}(\mathcal{D}') = 3$:
Es sei $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8$, P der neunte Schnittpunkt mit $P + R = \mathcal{C} \cdot \mathcal{D}$, $P' + R = \mathcal{C} \cdot \mathcal{D}'$. Nach dem „Satz vom neunten Punkt“ geht jede Kubik durch R auch durch P, also $P = P'$. $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ muss dabei nicht gelten.



Fall $\mathrm{Grad}(\mathcal{D}) = \mathrm{Grad}(\mathcal{D}') \geq 4$:
Dieser Fall folgt mit dem „Satz vom letzten letzten Punkt“ (siehe unten).

$\square$

(4.14) Schnitt einer Kubik mit Kurven höheren Grades

Betrachte die Kurven $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ mit $\mathrm{Grad}(\mathcal{C}) = 3$, $\mathrm{Grad}(\mathcal{D}) = m$ sowie $\mathcal{C} \cdot \mathcal{D} = P_1 + \ldots P_{3m}$.

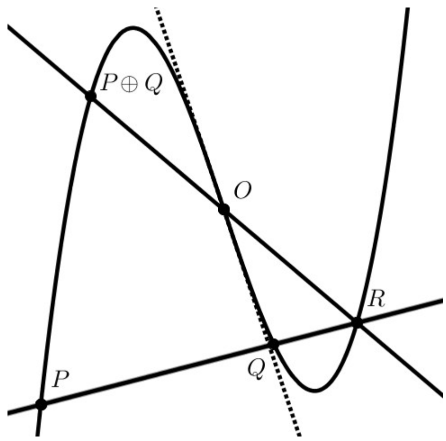
Satz. Liegen drei der Punkte von $\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}$ auf einer Geraden l, so liegen die übrigen $3m - 3$ Punkte auf einer Kurve von Grad $m - 1$.

Beweis. O.B.d.A. seien $l = \mathcal{V}(z)$, $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F)$, $\mathcal{D} = \mathcal{V}(G)$. Man erhält $\mathcal{C} \cdot l \leftrightarrow F(x,y,0) = 0$, $\mathcal{D} \cdot l \leftrightarrow G(x,y,0) = 0$; $G(x,y,0) = q(x,y)F(x,y,0)$. $G(x,y,z) - q(x,y)F(x,y,z)$ verschwindet für $z = 0$. Schreibe $G(x,y,z) - q(x,y)F(x,y,z) = zH(x,y,z)$, wobei H vom Grad $m-1$ ist. Für den Schnitt $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ gilt $G = 0$, $F = 0$ und damit $zH = 0$. Drei der Punkte liegen also auf der Geraden $\mathcal{V}(z)$ und die übrigen auf einer Kurve $\mathcal{V}(H(x,y,z))$ vom Grad $m - 1$. □

Satz. Es seien $\mathcal{C}$ eine glatte Kubik, $O \in \mathcal{C}$ ein Wendepunkt, $\mathcal{D}$ eine Kurve vom Grad m sowie $\mathcal{C} \cdot \mathcal{D} = P_1 + \ldots + P_{3m}$. Dann gilt $P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_{3m} = O$ in $(\mathcal{C}, \oplus, O)$.

Beweis. Induktion nach m.

Im Fall $m = 1$ (s. Bild) gilt $P \oplus Q \oplus R = O$, also ist die Behauptung wahr für $m = 1$.
$m \mapsto m+1$: $P_1 + P_2 + Q = \mathcal{C} \cdot l$, $l = |P_1P_2|$, $P_3 + P_4 + R = \mathcal{C} \cdot l'$, $l' = |P_3P_4|$, $Q + R + S = \mathcal{C} \cdot l''$, $l'' = |QR|$.
$\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup l''$ Kurve vom Grad $m + 1$.
$\Rightarrow \mathcal{C} \cdot \tilde{\mathcal{D}} = Q + R + S + P_1 + \ldots + P_{3m}$. Dabei liegen Q, P_1, P_2 auf einer Geraden und $R, S, P_3, \ldots, P_{3m}$ auf einer Kurve von Grad m. Da R, P_3, P_4 auf einer Geraden liegen, liegen folglich $S, P_5, \ldots, P_{3m}$ auf einer Kurve vom Grad $m - 1$.
Aus $P_1 \oplus P_2 \oplus Q = O$ und $P_3 \oplus P_4 \oplus R = O$ folgt nach Induktionsvoraussetzung $S \oplus P_5 \oplus \ldots \oplus P_{3m} = O$ in $(\mathcal{C}, \oplus, O)$ und damit auch $Q \oplus R \oplus S \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_{3m} = O$. Aber es gilt auch $Q \oplus R \oplus S = O$, also $P_1 \oplus \ldots \oplus P_{3m} = O$.



□

Korollar („Satz vom letzten Punkt“)**.** *Jeder der $3m$ Schnittpunkte einer Kubik $\mathcal{C}$ mit einer Kurve vom Grad m wird durch die übrigen $3m - 1$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. $P_1 \oplus \ldots \oplus P_{3m} = O \Rightarrow P_{3m} = \ominus(P_1 \oplus \ldots \oplus P_{3m-1})$. □

Korollar. *Ein Divisor vom Grad $3m$ auf $\mathcal{C}$ ist genau dann Schnittdivisor mit einer Kurve vom Grad m, wenn $P_1 \oplus \ldots \oplus P_{3m} = O$.*

Beweis. Man kann immer eine Kurve vom Grad m durch $3m-1$ Punkte finden, die $\mathcal{C}$ nicht als Komponente hat. $\dim \mathbb{C}[x,y,z]_m = \frac{(m+2)(m+1)}{2} = \frac{1}{2}(m^2+3m+2)$.
Kurve durch $3m-1$ Punkte: $\dim \geq \frac{1}{2}(m^2+3m+2) - 3m + 1 = \frac{1}{2}(m^2-3m+2)+1$.
Kurve der Form $F \cdot G$, $\mathrm{Grad}(G) = m-3$: $\frac{(m-2)(m-1)}{2} = \frac{1}{2}(m^2-3m+2)$. □

Korollar (Cayley-Bacharach für Kubiken)**.** $\mathcal{C} \cdot \mathcal{D} = \mathcal{C} \cdot \mathcal{E} + \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} = \mathcal{C} \cdot \mathcal{E}'$. *Liegen* $3e$ *von insgesamt* $3m$ *Punkten auf einer Kurve vom Grad* e*, so liegen die übrigen* $3e'$ *auf einer Kurve vom Grad* e', $e+e'=m$. *(Gilt auch allgemeiner.)*